Přehled pojmů výpočetní geometrie

Markéta Dubská, Bronislav Přibyl

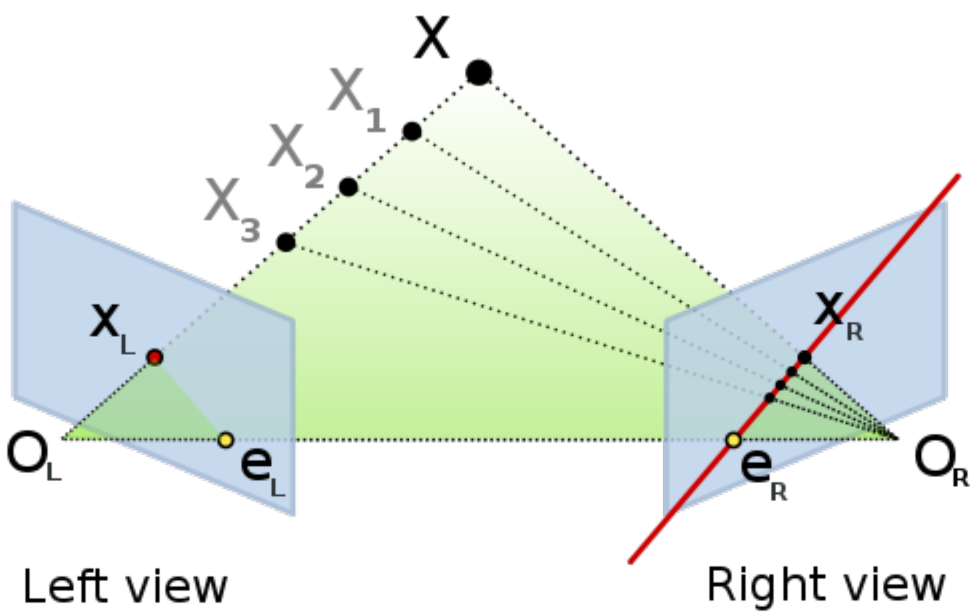
Ústav počítačové grafiky a multimédií
Fakulta informačních technologií

Vysoké učení technické v Brně

Osnova

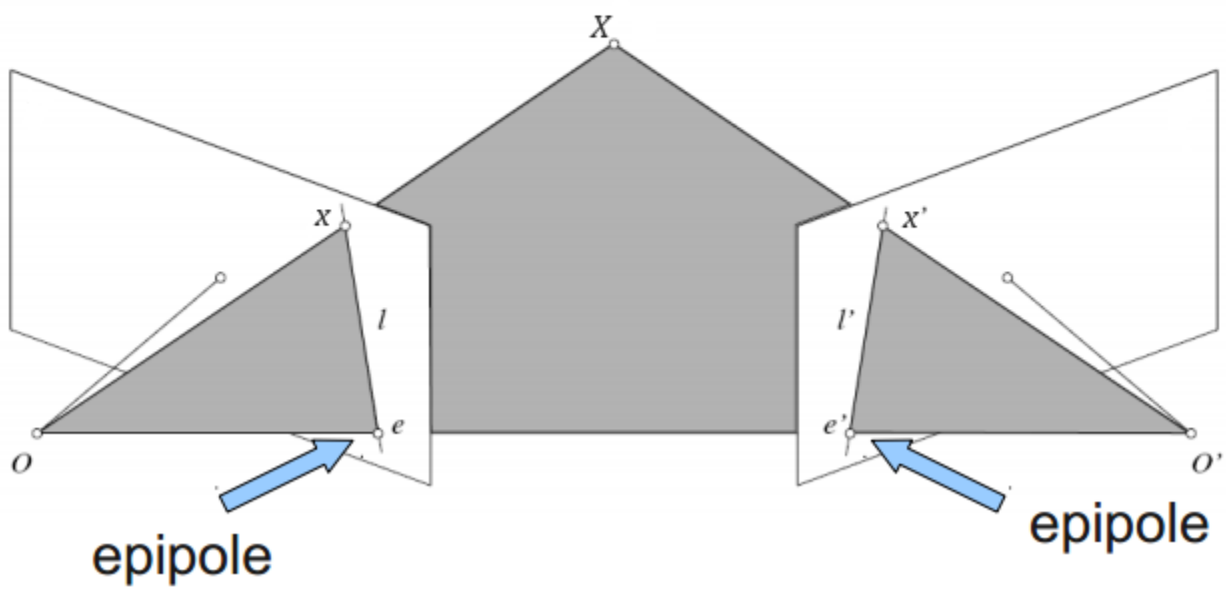
- Pojmy z lineární algebry a geometrie
- Souřadné systémy
- Homogenní souřadnice
- Afinní a projektivní geometrie
- Epipolární geometrie

Epipolární geometrie



Dvojpohledová geometrie

- úloha:
  - Jaká je 3D geometrie scény?
  - Jaká je pozice kamer?
  - Které body spolu korespondují?



Dvojpohledová geometrie

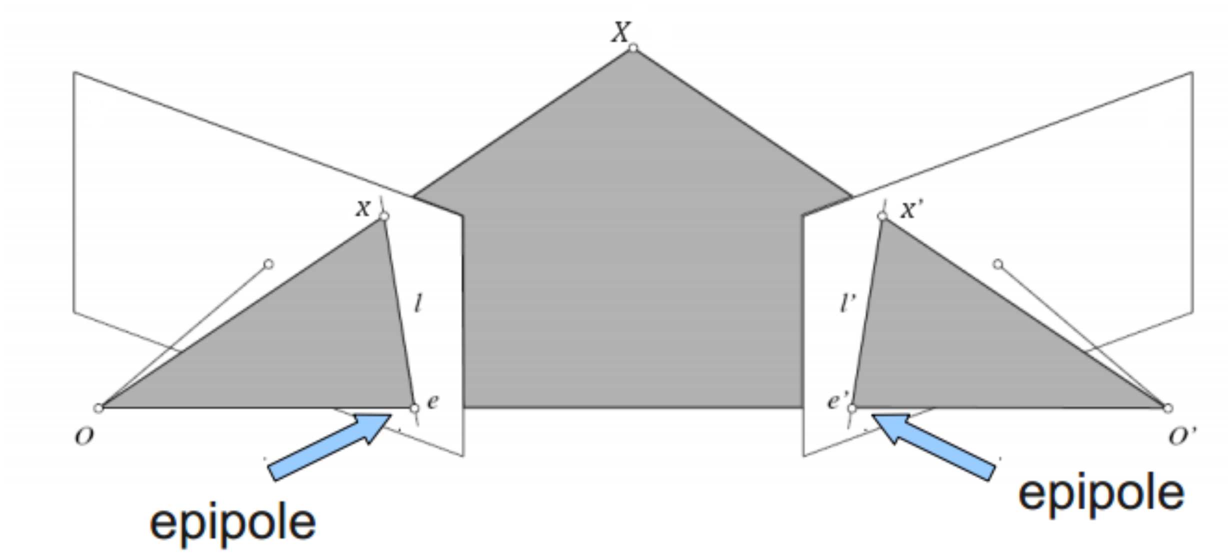
- vstup: dva snímky stejné scény zachycené ze
  - známych pozic kamer
  - neznámych pozic - je nutné vypočítat vzájemnou polohu kamer
- algoritmus:
  - najdi korespondující body v obou obrazech
  - vypočti paprsky procházející těmito body
  - skutečný 3D bod leží na průsečíku těchto paprsků
- výstup:
  - body v 3D prostoru (point cloud)
  - hloubková mapa

Scéna

- Dvě kamery, jejich projekční matice P, P'

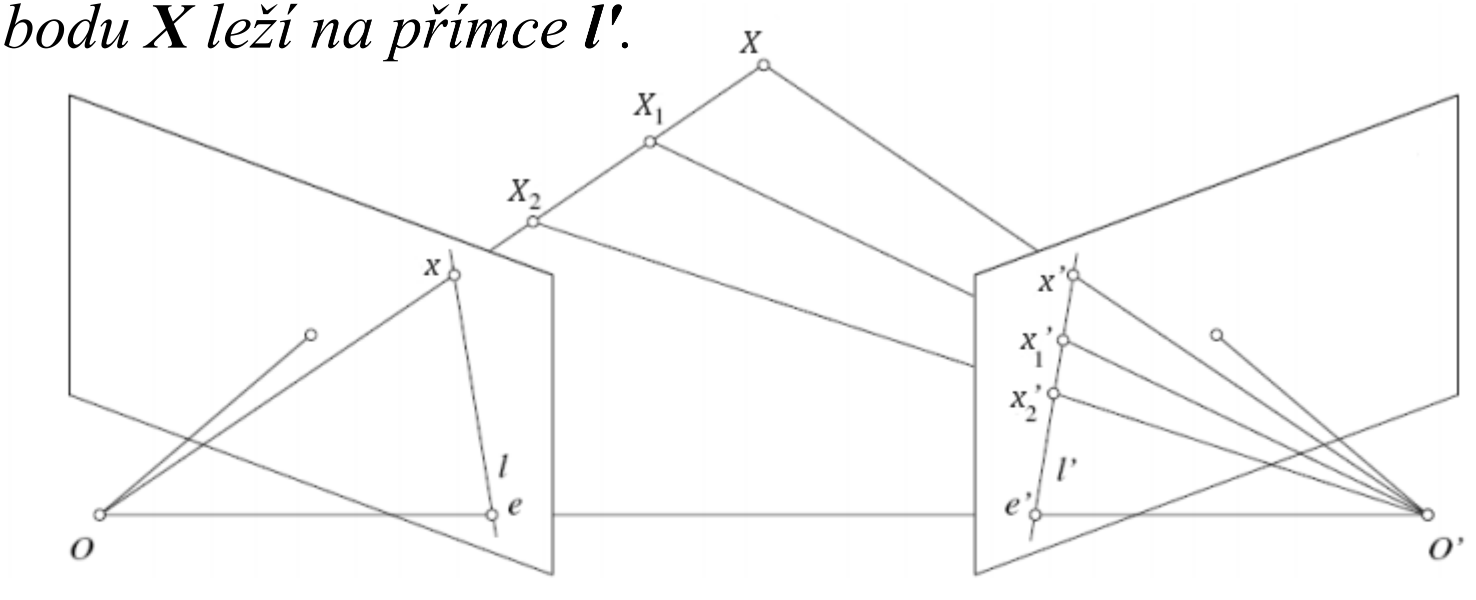
$$PX = x,\ P'X = x'$$

- <u>Epipóly:</u> **Projekce středů promítání na průmětnu.**



Epipolára

- Bod na jedné průmětně určuje přímku na druhé průmětně.
- Druhý obraz bodu leží na této přímce.
- *Epipolára **l'** bodu **x** je projekce přímky procházejíci středem promítaní **O** a promítnutým bodem **x** v průmětně. Projekce bodu **X** leží na přímce **l'**.*

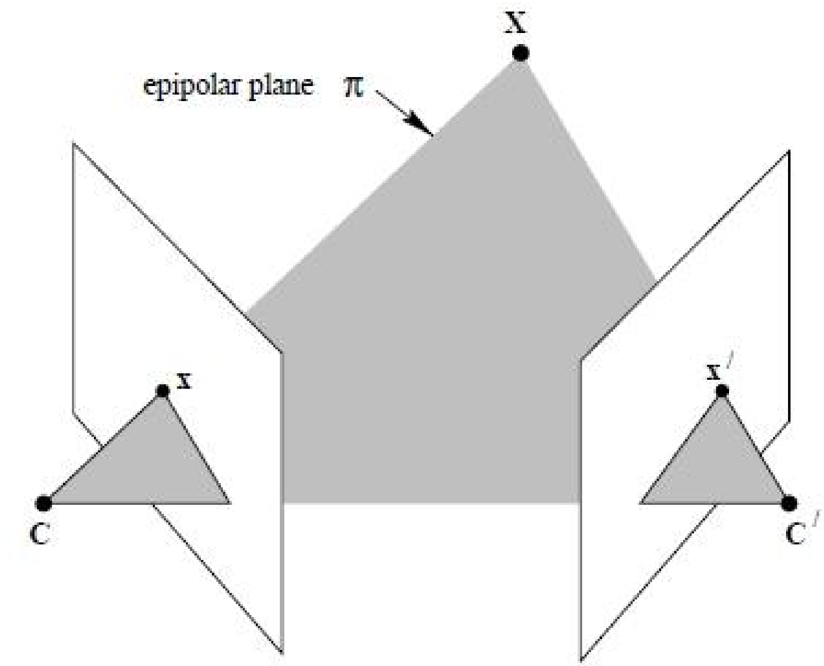


Epipolára

- Problém hledání korespondujícího bodu na ploše se redukuje na hledání bodu na přímce.

Epipolární rovina

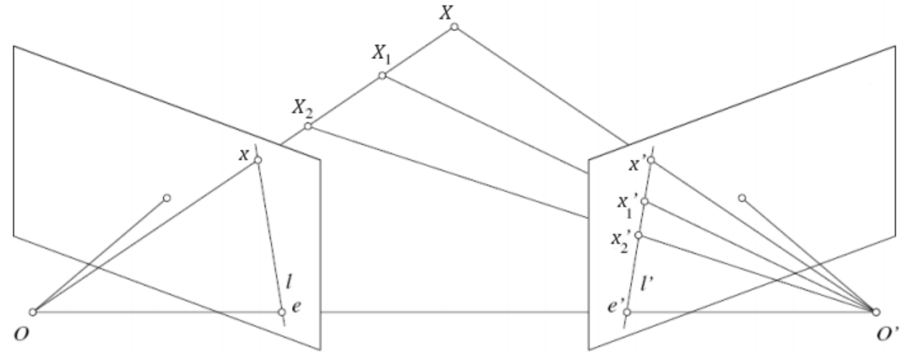
- Středy projekcí, bod X a projekce bodu leží na rovine.
- Každá rovina, která obsahuje bázi (přímka spojujíci středy promítaní) je <u>epipolární rovina</u>.



Shrnutí

- Epipolára l' je obraz přímky procházející bodem x.
- Epipól e je průsečík průmětny a báze (přímky procházející středmi projekcí).
- Všechny epipoláry se protínají v epipólu.
- Epipolární rovina je rovina obsahujíci bázi. Průsečík epipolární roviny s průmětnou je epipolára.

Matematika



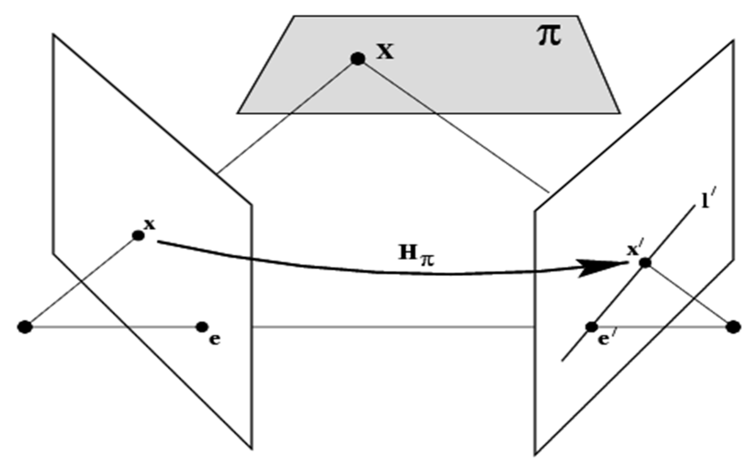
- Fundamentální matice F:
  - určuje mapování $x \rightarrow l'$
- Platí

$$Fx = l', \quad F^T x' = l$$

- Navíc platí
  - $x'^T F x = 0$
  - $Fe = 0, \quad F^T e' = 0$
  - Matice F je 3x3 matice rádu 7
    - 7 stupňů volnosti - 2 krát 2 parametry po epipóly a 3 pro určení homografie mezi epipolárami

Přesun v rovine

- Rovina π, která neprochází středy promítaní.
- Průsečík X paprsku ze středu promítaní přes obraz x s rovinou π.
- Obraz bodu X na druhé průmětně <u>leží na epipoláre</u> l' bodu x.
- Epipolára prochází bodem e' a x', je jednoznačne určená.



Přesun v rovine

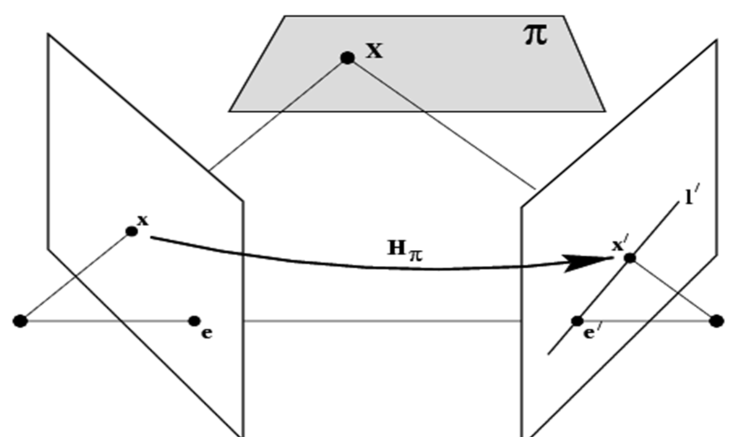
$$l' = e' \times x' = [e']_\times x'$$

$$x' = H_\pi x$$

$$l' = [e']_\times H_\pi x = Fx$$

$$[a]_\times = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{F = [e']_\times H_\pi}$$



Algebraické řešení

- Matice projekcí kamer: P, P' ($PX = x$, $P'X = x'$)
- Bod X je řešení rovnice pro nejaké λ, (P^+ je pseudoinverzní matice):

$$X(\lambda) = P^+x + \lambda C \quad (PP^+=I)$$

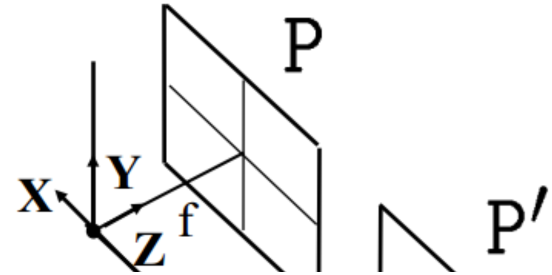
- Epipolára prochází epipólem (t.j. projekcí středu promítání) a projekcí bodu X:

$$l' = P'C \times P'P^+x$$

$$l' = Fx$$

$$\boldsymbol{F = [e']_\times P'P^+}$$

Příklad - paralelní kamery



$$P = K[I|\mathbf{0}] \qquad P' = K'[R|\mathbf{t}]$$

$$K = K' = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R = I \quad \mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P^+ = \begin{bmatrix} K^{-1} \\ \mathbf{0}^T \end{bmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F = [P'C]_\times P'P^+ = [K'\mathbf{t}]_\times K'RK^{-1} = K'^{-T}[\mathbf{t}]_\times RK^{-1} = K'^{-1}RK^T[KR^T\mathbf{t}]_\times$$

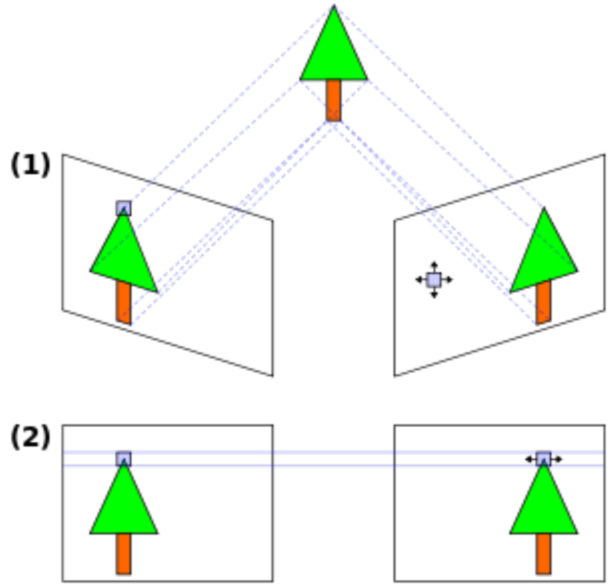
$$e = P\begin{pmatrix} -R^T\mathbf{t} \\ 1 \end{pmatrix} = KR^T\mathbf{t} \quad e' = P'\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = K'\mathbf{t}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}'^{-\mathbf{T}}\mathbf{R}\mathbf{K}^{\mathbf{T}}[\mathbf{e}]_\times$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

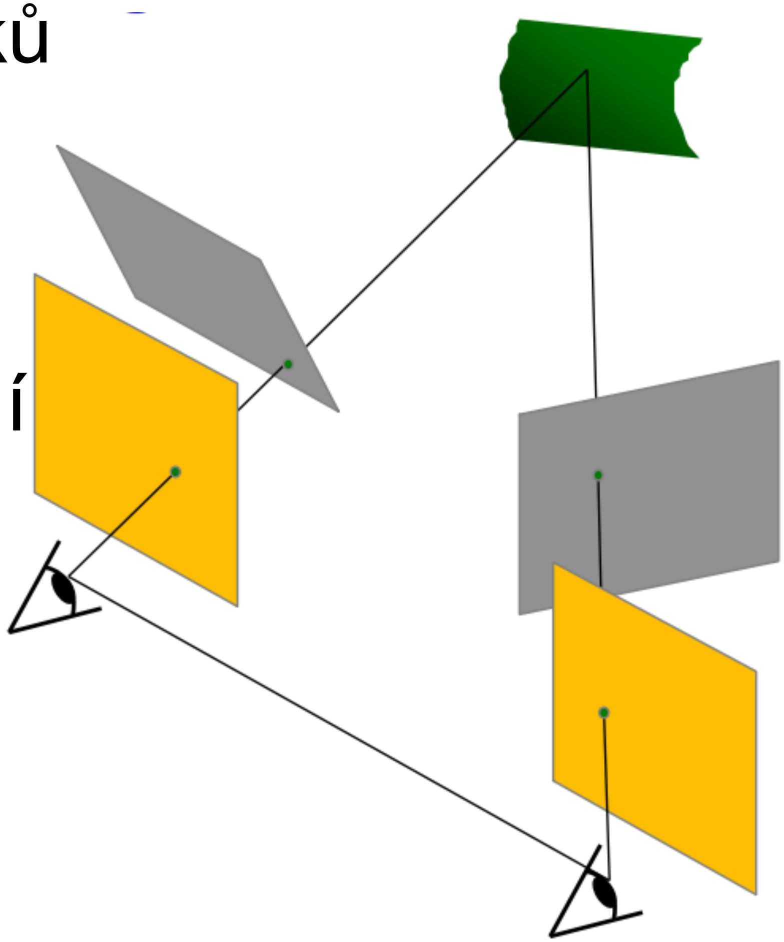
Rektifikace

- Projekce obrázků tak, aby byly epipoláry horizontální.
- Hledání korespondujícího bodu se zjednodušuje.



Rektifikace

- Homografie dvou obrázků
- Epipóly $\rightarrow\infty$
- Všechny epipoláry jsou rovnoběžné
- Warping + převzorkování
  - bilineární interpolace
  - trilineární interpolace



Řešení matice F z dvojic bodů

- 7 stupňů volnosti - 7 dvojic korespondujících bodů (nelineární rovnice)
- 8 dvojic - lineární soustava, řešení pomocí nejmenších čtverců, SVD

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix}$$

$$A\mathbf{f} = \begin{bmatrix} x'_1x_1 & x'_1y_1 & x'_1 & y'_1x_1 & y'_1y_1 & y'_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x'_nx_n & x'_ny_n & x'_n & y'_nx_n & y'_ny_n & y'_n & x_n & y_n & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{13} \\ f_{21} \\ f_{22} \\ f_{23} \\ f_{31} \\ f_{32} \\ f_{33} \end{pmatrix}$$

Řešení matice F - *least squares*

$A\mathbf{f} = 0$

$A = UDV^T$

řešení - poslední sloupec V

minimalizuje $||A\mathbf{f}||$ kde $||\mathbf{f}|| = 1$

Řešení matice F - SVD

$F = UDV^T$

U a V jsou ortogonální, $D = \mathrm{diag}(r,s,t),\ r \geq s \geq t$

$F' = U\mathrm{diag}(r,s,0)V^T$

F' je singulární

F' minimalizuje $|F-F'|$

F' je "skoro" jako F

Esenciálni matice E

- Fundamentální matice s normalizovanými souřadnicemi

$$P = [R|\mathbf{t}]$$
$$x = PX$$
$$\hat{x} = K^{-1}x = [R|\mathbf{t}]X$$

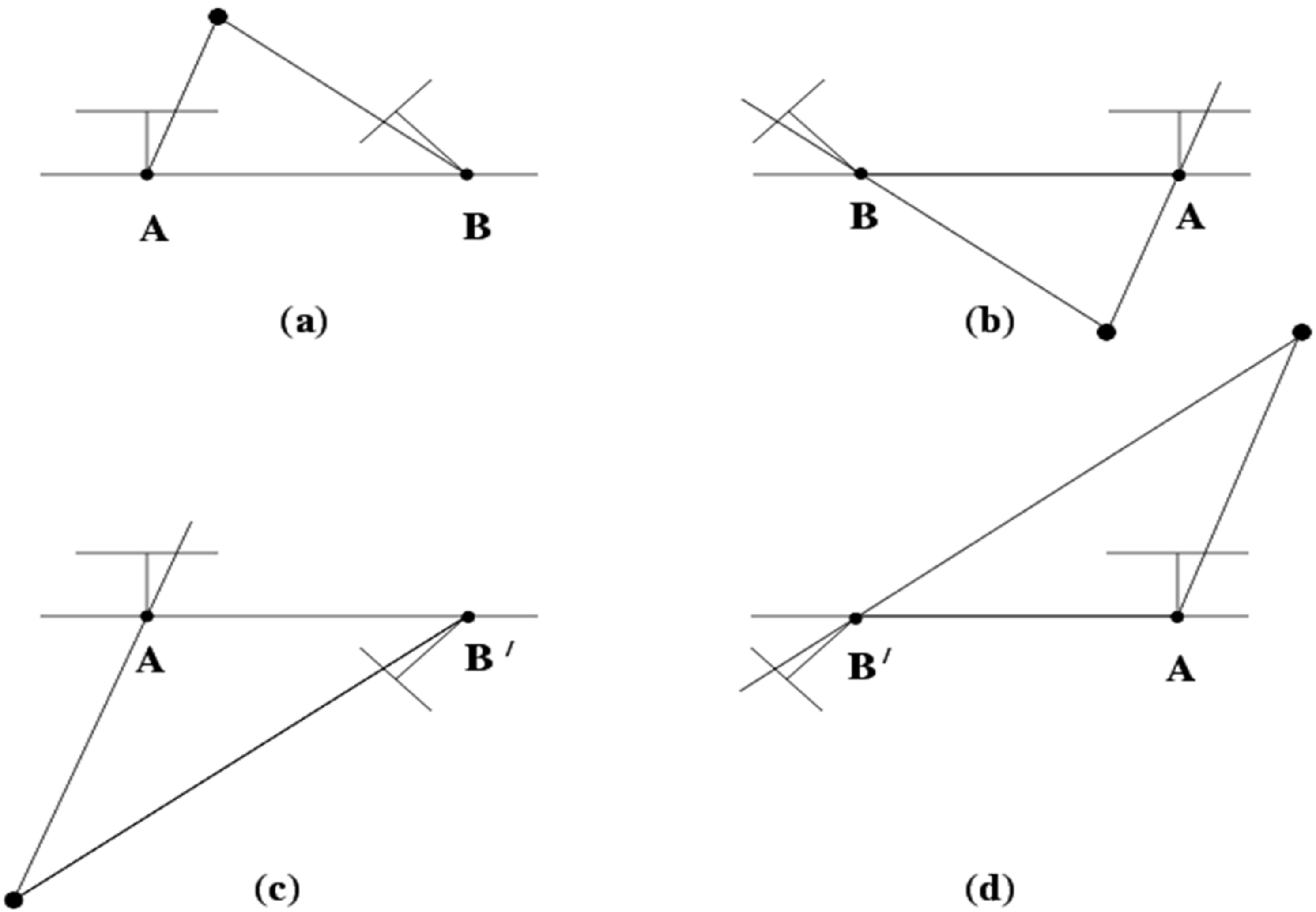
- Normalizované parametry kamer

$$P = [I|\mathbf{0}] \qquad P' = [R|\mathbf{t}]$$

$$E = [\mathbf{t}]_\times R = R[R^T\mathbf{t}]_\times$$

Esenciální matice

Možná řešení



Disparita

- Rozdíl pozice bodů v levém a pravém obrazu
- Mapa disparity - disparita pro každý pixel

- Když jsou známé parametry kamer, je možné přepočítat disparitu na hloubku.